ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

5ο φυλλάδιο ασκήσεων

1) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 5x - 17$. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και επί και να βρείτε τον τύπο της f^{-1}.

2) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2$, και το σύνολο $A = (-1, 2]$. Να υπολογιστούν τα σύνολα $f(A)$, $f^{-1}(A)$, $f(f^{-1}(A))$ και $f^{-1}(f(A))$.

3) Έστω $f : A \to B$ και $g : A \to B$ δύο συναρτήσεις. Αν $f \subseteq g$ τότε $f = g$.
(Σημείωση: Θυμηθείτε ότι οι f, g είναι υποσύνολα του $A \times B$, υπό αυτή την οπτική δείτε το $f \subseteq g$.)

4) Έστω $f : A \to B$ και $g : B \to \Gamma$ δύο συναρτήσεις.
α) Αν η f είναι επί και η $g \circ f$ είναι 1-1, να δειχθεί ότι η g είναι 1-1.
β) Να δείξετε, χρησιμοποιώντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα, ότι η υπόθεση ότι η f είναι επί δεν μπορεί να παραλειφθεί στο προηγούμενο ερώτημα.

5) Έστω $f : A \to B$ και $g : B \to \Gamma$ δύο συναρτήσεις.
α) Αν η g είναι 1-1 και η $g \circ f$ είναι επί, να δειχθεί ότι η f είναι επί.
β) Να δείξετε, χρησιμοποιώντας κατάλληλο αντιπαράδειγμα, ότι η υπόθεση ότι η g είναι 1-1 δεν μπορεί να παραλειφθεί στο προηγούμενο ερώτημα.

6) Αν $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσες ακολουθίες συνόλων (δηλ. $A_n \supseteq A_{n+1}$ και $B_n \supseteq B_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$) να δείξετε ότι

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (A_n \cup B_n) = (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \cup (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n).$$

7) Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 2|x - 3|$.
α) Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1 και αν είναι επί. Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f.
β) Να βρεθούν τα σύνολα $f(X)$ και $f^{-1}(X)$ όταν
(i) $X = [\frac{1}{4}, 2)$. (ii) $X = (-\infty, 4]$ (iii) $X = (0, +\infty)$.

8) Έστω $f : X \to Y$ μια επί συνάρτηση και $\{B_i : i \in I\}$ μια διαμέριση του Y. Να δείξετε ότι η $\{f^{-1}(B_i) : i \in I\}$ είναι μια διαμέριση του X.

9) Έστω $f : X \to Y$ μια 1-1 και επί συνάρτηση και $\{A_i : i \in I\}$ μια διαμέριση του X. Να δείξετε ότι η $\{f(A_i) : i \in I\}$ είναι μια διαμέριση του Y.

10) Έστω E ένα σύνολο και A, B δύο μη κενά υποσύνολα του E. Ορίζουμε τη συνάρτηση $\phi : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ με τύπο

$$\phi(X) = (X \cap A, X \cap B).$$

Να δείξετε ότι:
α) Η συνάρτηση ϕ είναι 1-1 αν και μόνο αν ισχύει $E = A \cup B$.
β) Η συνάρτηση ϕ είναι επί αν και μόνο αν ισχύει ισχύει $A \cap B = \emptyset$.